Radosław Rudnicki
Uniwesytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
E–mail: joix@mat.uni.torun.pl

Oczekiwane straty graczy w Multi Lotku

Streszczenie

Spoglądamy na zagadnienie gry w Multi Lotka od strony totalizatora, aby stwierdzić, że niezależnie od ilości typowanych liczb, gracze tracą średnio około 75 groszy na jednym zakładzie. Podane wyliczenia wartości oczekiwanych strat graczy są mniej przydatne pojedynczym osobom grającym, natomiast są niezbędne dla osób interesujących się tym, ile średnio totalizator zarabia na typujących określone ilości liczb. Nie uwzględniając kosztów przeprowadzania zakładów, można by stwierdzić, że zarobek ten jest nadspodziewanie duży.

1 Wprowadzenie

Gra „Multi Lotek” polega na komisyjnym losowaniu 20 spośród 80 ponumerowanych kul. Przed losowaniem, osoby biorące udział w grze wysyłają w kolekturze kupony, na których typują k liczb ($1 \le k \le 10$, $k \in \mathbf{N}$), które ich zdaniem znajdą się na kulach wybranych w losowaniu. Wysokości ewentualnych wygranych zależą zarówno od liczby trafień, jak i od ilości typowanych liczb. Niezależnie od liczby k typowanych liczb pojedynczy zakład – wytypowanie k kul – kosztuje 1 zł i jest obciążony obowiązkową dopłatą w wysokości 25 groszy (patrz [1]), co daje razem 1,25 zł.

2 Konstrukcja przestrzeni probabilistycznej

Niech $\mathbf{\Omega}$ oznacza zbiór wszystkich możliwych wyników losowania 20 spośród 80 ponumerowanych kul. Wtedy

$$\Omega = \{ \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{20}\} : \omega_i \neq \omega_j \ \ dla \ \ i \neq j, \ i, j \in \{1, 2, \ldots, 20\} \}.$$

Niech $\boldsymbol{F} = 2^{\mathbf{\Omega}}$ oraz P – prawdopodobieństwo klasyczne na $\boldsymbol{F}$ (tzn. $P(\{\omega\}) = 1/\#\mathbf{\Omega}$, $\omega \in \Omega$). W ten sposób skonstruowaliśmy przestrzeń probabilistyczną ($\mathbf{\Omega}$, $\boldsymbol{F}$, P).

3 Określenie zmiennych losowych opisujących wysokości wygranych

Niech $A_{k,j}$, gdzie $1 \le k \le 10$ oraz $0 \le j \le k$, będzie zdarzeniem polegającym na tym, że wśród 20 wylosowanych liczb jest j liczb spośród k liczb typowanych przez gracza. Wówczas

$$A_{k,j} = \{ \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{20}\} \in \Omega \ : \ \omega_i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \ i \in \{1, \ldots, j\}, \\ \omega_m \in \{k+1, k+2, \ldots, 80\}, \ m \in \{ j+1, \ldots, 20\} \}.$$

Nietrudno zauważyć, że przy ustalonym k ($1 \le k \le 10$) zdarzenia A_{k,j_1} i A_{k,j_2} są rozłączne dla $j_1 \neq j_2$ oraz, że

$$\bigcup_{j=0}^{k} A_{k,j} = \Omega.$$

Niech X_k będzie zmienną losową opisującą wartość wygranej w przypadku, gdy gracz typuje k liczb, określoną wzorem

$$X_k(\omega) = \sum_{j=1}^{k} c_{k,j} \chi_{\{A_{k,j}\}}(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

gdzie $c_{k,j}$ jest elementem zamieszczonej poniżej macierzy $C = (c_{k,j})_{k=1,\ldots,10,\ j=0,\ldots,10}$, określającym wysokość (w złotych) wygranej wypłacanej przez totalizator graczowi, w przypadku trafienia przez niego j spośród k typowanych liczb; $\chi_{\{A_{k,j}\}}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $A_{k,j}$.

$$C = \begin{pmatrix}
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 330 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 60 & 600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 10 & 100 & 2500 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 30 & 300 & 10000 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 20 & 150 & 1000 & 24000 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 70 & 260 & 5000 & 100000
\end{pmatrix}$$

UWAGA: Zdajemy sobie sprawę, że zdarzenia $A_{k,j}$ są niemożliwe, gdy $1 \leq k < j \leq 10$ i słusznym jest przypisanie zerowej wygranej tymże zdarzeniom. Poza tym, warto wspomnieć, że wysyłając kupon gracz nie ma możliwości typowania zdarzeń niemożliwych.

4 Rozkłady zmiennych losowych opisujących wysokości wygranych

Oczywiście zmienne losowe X_k, $1 \leq k \leq 10$, mają rozkłady dyskretne, oraz nietrudno zauważyć, że

$$P(X_k = c_{k,j}) = \frac{\binom{k}{j}\binom{80-k}{20-j}}{\binom{80}{20}}, \quad c_{k,j} \neq 0, \ 1 \leq j \leq k,$$

ponieważ

$$\# A_{k,j} = \binom{k}{j}\binom{80-k}{20-j}, \qquad \#\Omega = \binom{80}{20}$$

oraz

$$P(X_k = 0) = 1 - \sum_{\{j : c_{k,j} \neq 0\}} P(X_k = c_{k,j}).$$

5 Wartości oczekiwane wygranych w Multi Lotku

Znając rozkłady zmiennych losowych X_k, opisujących wysokości wygranej gracza, który typował k liczb w Multi Lotku, możemy obliczyć ich wartości oczekiwane ze wzoru

$$EX_k = \sum_{\{j : c_{k,j} \neq 0\}} c_{k,j} P(X_k = c_{k,j}).$$

Niech $\boldsymbol{X}$ będzie wektorem określonym w następujący sposób:

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_{10})^{\mathrm{T}}.$$

Wtedy korzystając z powyższego wzoru obliczamy wektor wartości oczekiwanych

$$E\boldsymbol{X} = (EX_1, \ldots, EX_{10})^{\mathrm{T}}$$
$$\approx (0.500, 0.481, 0.500, 0.508, 0.502, 0.507, 0.500, 0.509, 0.498, 0{,}509)^{\mathrm{T}}.$$

6 Podsumowanie – interpretacja wyników

Niech $L_k = 1.25 - X_k$ będzie zmienną losową opisującą przegraną (stratę) gracza typującego k liczb w Multi Lotku; $1 \le k \le 10$. Niech

$$\boldsymbol{L} = (L_1, \ldots, L_{10})^{\mathrm{T}}.$$

Z faktu, że dla dowolnego $1 \le k \le 10$, mamy $EL_k = 1.25 - EX_k$, uzyskujemy:

$$E\boldsymbol{L} = (EL_1, \ldots, EL_{10})^{\mathrm{T}}$$
$$\approx (0.750, 0.769, 0.750, 0.742, 0.748, 0.743, 0.750, 0.741, 0.752, 0{,}741)^{\mathrm{T}}.$$

Spoglądając na zagadnienie gry w Multi Lotka od strony totalizatora, można powiedzieć, że niezależnie od ilości typowanych liczb, gracze tracą średnio około 75 groszy na jednym zakładzie.

7 Kod programu

```
C:=matrix(10,11,[]):

C[1,2]:=2: C[2,3]:=8: C[3,3]:=1: C[3,4]:=26:
```

```
C[4,3]:=1: C[4,4]:=4: C[4,5]:=40:
C[5,4]:=2: C[5,5]:=10: C[5,6]:=330:
C[6,4]:=1: C[6,5]:=4: C[6,6]:=60: C[6,7]:=600:
C[7,4]:=1: C[7,5]:=2: C[7,6]:=10: C[7,7]:=100:
C[7,8]:=2500:
C[8,5]:=2: C[8,6]:=10: C[8,7]:=30: C[8,8]:=300:
C[8,9]:=10000:
C[9,5]:=1:  C[9,6]:=4:  C[9,7]:=20: C[9,8]:=150:
C[9,9]:=1000: C[9,10]:=24000:
C[10,5]:=1: C[10,6]:=2: C[10,7]:=6:  C[10,8]:=70:
C[10,9]:=260: C[10,10]:=5000: C[10,11]:=100000:

pstwo:=proc(k,j)
   local p;
begin
   if (j>k) then
      p:=0;
   else
      p:=binomial(k,j)*binomial(80-k,20-j)/binomial(80,20);
   end_if;
   return(p);
end_proc:

P:=matrix(10,11,(k,j)->pstwo(k,j-1)):

EX:=matrix(1,10,0): EL:=matrix(1,10,0):

for k from 1 to 10 do
   EX[1,k]:=sum(C[k,j]*P[k,j],j=1..k+1);
   EL[1,k]:=1.25-EX[1,k];
end_for;

DIGITS:=3: float(EX); float(EL);
```

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.481 & 0.5 & 0.508 & 0.502 & 0.507 & 0.5 & 0.509 & 0.498 & 0.509 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.769 & 0.75 & 0.742 & 0.748 & 0.743 & 0.75 & 0.741 & 0.752 & 0.741 \end{pmatrix}$$

Literatura

1. *Regulamin gry losowej Multi Lotek*, Warszawa, maj 2004, http://bip.totalizator.com.pl/public/popup.php?id_menu_item=3860